



# Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a V-a

## Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție , rezolvare	Punctaj
1.	a) Din $a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2$ , obținem: $\left. \begin{array}{l} c \cdot (a+b) = b \cdot (a+b) \\ a+b = 2010 \end{array} \right\} \Rightarrow c = b.$	2p
	b) Din $b = c \Rightarrow 2 \cdot a + b + c = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a+b) = 4020.$	2p
	c) Din $b = c \Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2) = 0.$	3p
2.	$u(6^n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 6, & n \geq 1 \end{cases}$ iar $u(7^m) \in \{1, 7, 9, 3\}$ . Pentru a obține ultima cifră 7, convine numai $u(6^n) = 6$ , pentru $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ . Atunci $u(7^m) = 1 \Rightarrow m$ este multiplu de 4 $\Rightarrow m \in \{0; 4\}$ . Pentru $m \geq 8 \Rightarrow 7^8 > 5000$ .	3p
	I. Dacă $m = 0 \Rightarrow 7^0 = 1$ ; Atunci, numerele $6^n$ care adunate cu 1 să dea un număr mai mic decât 5000 pot fi : 6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt : 7; 37; 217; 1297.	2p
	II. Dacă $m = 4 \Rightarrow 7^4 = 2401$ ; atunci, numerele $6^n$ care adunate cu 2401 să dea un număr mai mic decât 5000 sunt: 6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt: 2407; 2437; 2617; 3697. În concluzie, toate numerele căutate sunt: 7; 37; 217; 1297, 2407; 2437; 2617; 3697.	2p
3.	$m = 2009 \cdot 2010 \Rightarrow u(2009 \cdot 2010) = 0 \Rightarrow 5 / m$ ; a) $u\left(\overline{200c}^{2010}\right) = u(c^2) \Rightarrow$ $(n) = u(0+1+4+9+6+5+6+9+4+1) = 5 \Rightarrow 5 / n.$	3p

	<p>b)</p> <p><math>m = 2009 \cdot 2010</math>, se verifică care din cei doi factori se divide cu 7.</p> <p>Din Acesta este 2009.</p> <p>Apoi se verifică dacă 2009 se divide cu 49(A), apoi cu 343(Fals).</p> <p>Așadar, <math>k=2</math>.</p>	<b>2p</b>
	<p>c)</p> <p><math>2747 = 41 \cdot 67 \Rightarrow m = 2009 \cdot 2010 = 7^2 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow</math></p> <p><math>m = 2747 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2) \Rightarrow</math></p> <p><math>m = 2747 \cdot 1470 \Rightarrow</math> câțul este 1470 și restul este zero.</p>	<b>2p</b>
<b>4.</b>	<p>a) În produsul <math>1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13</math> există factorii 2, 5 și 10, deci produsul <math>1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13</math> se divide cu 100. Deci, ultimele două cifre ale produsului <math>1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13</math> sunt 00.</p>	<b>2p</b>
	<p>b) Dacă notăm <math>n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n</math>, atunci <math>a = 1! + 2! + 3! + \dots + 2010!</math>, iar <math>1! = 1</math>, <math>2! = 2</math>, <math>3! = 6</math>, <math>4! = 24</math>, <math>5! = 120</math>, <math>6! = 720</math>, <math>7! = 5040</math>, <math>8! = 40320</math>, <math>9! = 362880</math> și 100 divide <math>n!</math>, pentru orice <math>n \geq 10</math>.</p>	<b>2p</b>
	<p>Rezultă că numărul natural <math>a</math> are ultimele două cifre 13, iar <math>a + 2</math> are ultimele două cifre 15, de unde rezultă că <math>a + 2</math> nu este pătrat perfect (este cunoscut faptul că dacă un număr natural care are ultima cifră 5 și este pătrat perfect, atunci penultima cifră este egală cu 2)</p>	<b>3p</b>